

マイクロチューブ圧縮性流れの層流時の局所熱伝達率に関する研究

村上信太郎¹・豊田香²

要旨：熱交換器の設計では伝熱量を予測することが不可欠である。通常の非圧縮層流熱伝達であれば、熱伝達率はヌセルト数とグレツ数の関係として整理されており、伝熱量の予測は容易である。ところが等温壁マイクロチューブ内の圧縮性流れでは、加速による気体の静温低下と粘性散逸による壁面近傍での発熱が同時に熱伝達に影響を及ぼすため、伝熱量が従来の方法で予測できないことが報告されている。本研究では層流となる場合について、等温壁マイクロチューブ内の圧縮性流れの数値計算を行い、マイクロ流路でヌセルト数とグレツ数の関係が非圧縮層流熱伝達と異なることのメカニズムを考察し、熱伝達率を整理する一つの方法を提案する。

キーワード：強制対流熱伝達、マイクロ熱工学、圧縮性流体、局所熱伝達率、数値熱流体工学

1. 緒言

電子機器の急速な発展により、発熱する電子部品・素子のより効率的な冷却方法が求められている。Tuckerman ら¹⁾が提案するように、マイクロ流路の強制対流熱伝達を利用する冷却は有力な方法の一つである。マイクロ流路を用いた冷却装置の設計のためには、流路内の冷媒流体の流動・伝熱の詳細を把握した上で伝熱量を予測する必要があり、これまでにも精力的な研究がなされてきた。

例えば窒素ガスが直径 $10 \mu\text{m}$ 程度のマイクロチューブを流れる場合、常温・大気圧下ではクヌッセン数は 0.01 未満となり、希薄気体効果はまだ現れない。一方、圧縮性の影響は顕著に現れ、流動・伝熱は通常サイズの管内流の場合と大きく異なってくる。圧縮性がマイクロ流路内での流動に及ぼす影響については、Asako ら^{2), 3)}が局所のダルシー管摩擦係数（圧力変化から定義）とレイノルズ数 Re の積がマッハ数の関数として整理できることを実験に基づいて指摘した。Murakami ら^{4), 5)}はこれを発展させ、局所のダルシー管摩擦係数とファニング管摩擦係数（摩擦損失から定義）の間の関係をマッハ数の関数として理論的に導くとともに、ファニング管摩擦係数の整理式を提案している。流動に関しては、この Murakami らの整理式を用いることで、広範囲の流路寸法・設定圧力比に対して質量流量を予測することができる。

一方 Garimella ら⁶⁾が概括しているように、伝熱に関する多くの研究があるが、流動と比べて状況はさらに複雑であった。マイクロ流路内の窒素ガス流

れに対し、Wu ら⁷⁾が実験的にヌセルト数を測定したところ、 $Re < 600$ では通常の非圧縮層流熱伝達の場合の値よりも小さくなり、 $600 < Re < 1000$ では逆に大きくなった。Choi ら⁸⁾が同様の実験を行ったところ、通常よりはるかに大きいヌセルト数が測定された。ヌセルト数が通常より大きな値となる理由については、圧縮性により気体が加速され熱エネルギーの運動エネルギーへの変換により静温低下が起こり、それによって壁面と気体の温度差が増大し非圧縮層流熱伝達と比較して「追加の伝熱」が起こるため、と Asako ら^{9), 10)}によって指摘された。一方で Guo ら¹¹⁾は気体が高速の場合について、粘性散逸の影響が顕著になると報告している。すなわち、粘性散逸の発熱によって壁面近傍の気体温度が上昇するので、壁面と冷媒の温度差が小さくなつて、通常の層流熱伝達と比べて「伝熱の劣化」（ヌセルト数の低下）が起こる。

以上概観したように、マイクロ流路を冷媒気体が流れる場合の伝熱量を正確に予測するためには、流れの加速による「追加の伝熱」と、粘性散逸の発熱による「伝熱の劣化」の影響を同時に考慮する必要がある。そこで本研究では、等温壁マイクロチューブ内の圧縮性流れの数値計算を行い、これら 2 つの現象がヌセルト数に与える影響を考察し、熱伝達率を整理する一つの方法を提案する。

記号

D	チューブ直径 [m]
i	比内部エネルギー [J/kg]
L	チューブ長さ [m]

1 舞鶴工業高等専門学校 機械工学科 講師

2 舞鶴工業高等専門学校 機械工学科 准教授

\dot{m}	質量流量 [kg/s]
Ma	マッハ数 [-]
p	圧力 [Pa]
Pr	プラントル数 [-]
R	ガス定数 [J/(kg·K)]
Re	レイノルズ数 [-]
T	温度 [K]
T_b	混合平均温度 [K]
T_T	全温度 [K]
T_w	壁温 [K]
\dot{q}	壁面からの熱流束 [W/m ²]
x, r	円筒座標 (半径・軸方向) [m]
u, v	円筒座標の速度成分 (半径・軸方向) [m/s]
Gz	グレツ数 [-]
γ	比熱比 [-]
λ	熱伝導率 [W/(m·K)]
μ	粘性係数 [Pa·s]
ρ	密度 [kg/m ³]

修飾記号・添字

-	断面平均
b	外部領域
stg	貯気槽での状態
conv	従来・通常

2. 支配方程式

2. 1 マイクロチューブ内流れの支配方程式

数値計算を行うマイクロチューブ圧縮性流れの概略および計算領域を Fig. 1 に示す。よどみ点圧力 p_{stg} 、よどみ点温度 T_{stg} の気体が満たされた十分大きな貯気槽から圧縮性流体がマイクロチューブに流入し、マイクロチューブ出口から背圧 p_b の外部領域へと流出する。流れは軸対称流とし、2 次元円筒座標 (x, r) で計算する。本論文では層流となる場合のみを扱う。定常状態における支配方程式は

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r v}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r u v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rx}}{\partial r} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r v v}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} \\ &\quad - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u i}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r v i}{\partial r} &= -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) + \mu \phi \\ &\quad + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r q_r}{\partial r} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし粘性応力の成分は

$$\tau_{xx} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) \right\} \quad (5)$$

$$\tau_{xr} = \tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (6)$$

$$\tau_{rr} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) \right\} \quad (7)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left\{ 2 \frac{v}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) \right\} \quad (8)$$

熱流束の成分は

$$q_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_r = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (9)$$

式(4)の ϕ は散逸関数で

$$\begin{aligned} \phi &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

また、動作流体は理想気体で

$$i = \frac{R}{\gamma - 1} T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

が成り立つとする。

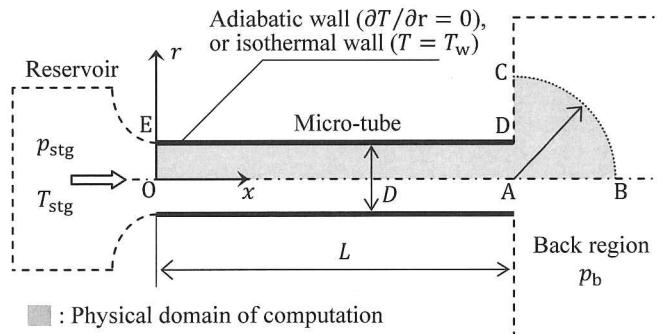


Fig. 1 Schematic diagram of problem and physical domain of computation

2. 2 境界条件

本論文で扱うマイクロチューブの寸法、圧力、温度の範囲ではクヌッセン数が 0.01 未満となるため、希薄気体効果については無視する。よってチューブ壁面ではすべりが起こらないとする。流入境界では、速度・圧力・温度・密度の分布が一様であるとする。下流側境界を背圧の圧力境界とする。以上の仮定より、境界条件は次のようになる：

$$\text{on the walls : } u = v = 0 \quad (12)$$

$$\text{on the symmetric axis : } \quad (13)$$

$$v = 0, \quad \partial u / \partial r = 0, \quad \partial T / \partial r = 0$$

$$\text{at the inlet : } v = 0, \quad u = u_{\text{in}}, \quad (14)$$

$$p = p_{\text{in}}, \quad \rho = \rho_{\text{in}}, \quad T = T_{\text{in}}$$

$$\text{at the downstream boundary : } p = p_b \quad (15)$$

壁面における熱的境界条件は

$$\partial T / \partial r = 0 ; \text{ for the tube with adiabatic wall} \quad (16)$$

$T = T_w$; for the tube with isothermal wall (17)
 流入境界における速度, 圧力, 温度, 密度の値は, Karki¹²⁾によって提案された以下の方法で定める。中心軸に隣接するセルで, 入口から n 番目にあるセルの圧力を p_n と表すこととする。時刻 t における p_2 , p_3 を用いて入口セルの圧力 $(p_{in})_{guess}$ を外挿する。これと時刻 t における $(p_1)_{old}$ を用いて, 時刻 $t + \Delta t$ の p_{in} を

$$p_{in} = \omega(p_1)_{old} + (1 - \omega)(p_1)_{guess} \quad (18)$$

と計算する。ただし ω は緩和係数で, 本研究では 0.9 を用いた。よどみ点からチューブ入口までは等エンタロピ膨張であると仮定し, 式(18)で求めた p_{in} を用いて時刻 $t + \Delta t$ の ρ_{in} , T_{in} , $(v_z)_{in}$ を次の式で計算する:

$$\begin{aligned} \frac{p_{in}}{\rho_{stg}} &= \left(\frac{\rho_{in}}{\rho_{stg}}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_{in}}{T_{stg}}\right)^{\gamma/(r-1)}, \\ u_{in} &= \sqrt{\frac{2\gamma RT_{stg}}{\gamma-1} \left\{1 - \left(\frac{p_{in}}{\rho_{stg}}\right)^{(r-1)/\gamma}\right\}} \end{aligned} \quad (19)$$

2. 3 動作流体

動作流体は N₂ (窒素) ガスとする。ガス定数・定圧比熱・比熱比は一定値とし Table 1(a)の値¹³⁾を用いる。出口マッハ数が 1 に近い場合, マイクロチューブ出口付近では流れが加速され, 静温が大きく低下する。そこで本研究では粘性係数・熱伝導率の温度依存性を次のように考慮した:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_{ref} \left(\frac{T_{ref,\mu} + C}{T + C} \right) \left(\frac{T}{T_{ref,\mu}} \right)^{1.5}, \\ \lambda &= \lambda_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref,\lambda}} \right)^{0.857} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし式中の定数は Table 1(b)の値 (文献 14), p.402) を用いる。粘性係数の式は Sutherland の式 (文献 14), p.374) である。熱伝導率は, 空気の場合 $\lambda = \lambda_{ref}(T/T_{ref})^{0.86}$ の関係がある¹⁵⁾ことから, 窒素の場合

Table 1 Properties of working gas

(a) Constant properties

R	296.8 J/(kg·K)
c_p	1.041×10^3 J/(kg·K)
γ	1.399

(b) Parameters of Eq. (20)

$T_{ref,\mu}$	300.0 K
C	104
μ_{ref}	1.787×10^{-5} Pa·s (at 0.1MPa)
$T_{ref,\lambda}$	300.0 K
λ_{ref}	2.598×10^{-2} W/(m·K) (at 0.1MPa)

合の温度依存性を $\lambda = \lambda_{ref}(T/T_{ref,\lambda})^\alpha$ と仮定して,

Table 2 に示す各温度における熱伝導率の測定値 (文献 14), p.402) から最小 2 乗法で α を求めた。この式(20)による値との誤差は Table 2 に示すものとなり, 173K~373K の範囲で実際の値をよく近似できる。

Table 2 Thermal conductivity

T [K]	measured λ [10 ⁻² W/(m·K)]	λ by Eq.(20) [10 ⁻² W/(m·K)]	Error [%]
173.15	1.59	1.622	2.0
373.15	3.09	3.132	1.4

3. 数値計算

3. 1 数値計算法及び計算格子

数値計算には ALE 法¹⁶⁾に基づくプログラム SALE¹⁷⁾を用いた。プログラムの詳細については該当の文献を参照されたい。SALE では物理領域を計算格子で四角形のセルに分割して支配方程式の離散化が行われる。従属変数のうち, 速度成分は格子点に, 圧力, 比内部エネルギー (温度), 密度はセルの中心に配置される。チューブ出口のマッハ数が 1 より小さいときは出口圧力 p_{out} を背压 p_b と等しいと見なすことができる。しかし (チューブ出口のマッハ数が 1 で) 流れが不足膨張となる場合は, p_{out} は p_b よりも大きくなる。通常, マイクロチューブの数値計算では物理領域としてチューブの部分のみ (Fig. 1 の O-A-D-E) がとられることが多いが, 不足膨張の場合はチューブ出口の圧力境界の値 p_{out} が未知であるため, チューブ出口 (A-D) で正確な境界条件を与えることができない。そこで本論文では Fig. 1 の O-B-C-D-E がとられることが多いが, 不足膨張の場合はチューブ出口の圧力境界の値 p_{out} が未知であるため, チューブ出口 (A-D) で正確な境界条件を与えることができない。そこで本論文では Fig. 1 の O-B-C-D-E に示すように, 物理領域を外部領域の一部を含めた範囲にとり, その下流境界 (B-C) に背压 p_b の圧力条件を与えることとした。外部領域の半径 R_b が無限大であるときこの境界条件は厳密に正しい。

計算誤差を小さくするため, 計算格子に直交曲線格子を用いる。チューブ出口付近の計算格子を Fig. 2 に示す。この格子は長方形領域の長方形格子を Fig. 1 の領域に等角写像して生成されたもの¹⁸⁾, チューブに沿う方向の格子線群はこの方向に流れる完全流体の流線になっている。格子は Fig. 2 のように壁面に近づくにつれ細かくなるようにした。

オリジナルの SALE にはセル中心に配置された変数の拡散項 (式(4)の右辺第 3, 4 項) の計算が組み込まれておらず, ユーザが組み込むことになっている。Fig. 2 に示すように直交曲線格子で分割されたセルはほぼ長方形であるが, 格子点が有限個なので, 格子線の曲率が大きい箇所でセルの形が長方形から

歪んでくる。このような場合にセル境界を通過する拡散流束を両隣のセル中心の量で計算すると、解の精度が低下する。そこで本論文では、歪んだ四角形セルの格子を用いても精度よく拡散流束を計算できる村上ら¹⁹⁾の方法をプログラムに組み込んだ。これにより、格子線の曲率が大きい箇所でも空間精度2次を維持して計算することができる。

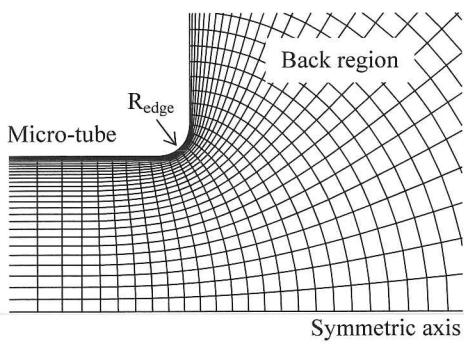


Fig. 2 A close-up view of computational grid (near the tube outlet)

3. 2 計算格子の検討

本研究では、すべての計算条件で半径・軸方向の格子数をそれぞれ27, 306とした。

断熱壁の場合において、 $D = 50\text{mm}$, $L = 200D$, $p_{\text{stg}} = 200\text{kPa}$, $p_b = 100\text{kPa}$, $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ の条件で、半径・軸方向の格子数がそれぞれ33, 374のより細かい格子で計算を行って比較したところ、両格子での差は局所マッハ数で0.2%, 回復係数(4.2節参照)で0.06%であった。また壁面を350Kの等温壁、他の条件は同じとして、両格子でチューブ出口の全温度の計算結果を比較したところ、差は0.02%であった。格子を細かくしても差がほとんど生じないことから、格子数は半径・軸方向にそれぞれ27, 306で十分とした。

また、すべての計算条件で、半径 R のチューブに対し外部領域の大きさ R_b (Fig. 1)を $10 \times R$ 、チューブ出口のエッジの丸み R_{edge} (Fig. 2)を $0.2 \times R$ とした。これらの大きさの取り方の影響を調べるために、いくつかの条件で $R_b = 20R$, $R_{\text{edge}} = 0.1R$ とした計算結果と比較したが、有意な差は生じなかった。

4. 計算結果と考察

4. 1 等温壁面からの熱伝達に関する考察

各物理量の断面平均を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{A} \int u dA, \\ \bar{\rho} &= \frac{1}{A} \int \rho u dA / \int u dA, \\ \bar{p} &= \frac{1}{A} \int p dA, \quad \bar{T} = \bar{p}/(\bar{\rho}R) \end{aligned} \quad (21)$$

マッハ数、レイノルズ数、グレツ数、貯気槽のプラントル数を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \text{Ma} &= \bar{u} / \sqrt{\gamma R \bar{T}}, \quad \text{Re} = \bar{m} D / (A \mu_{\text{stg}}), \\ \text{Gz} &= \frac{x}{D \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}_{\text{stg}}}, \quad \text{Pr}_{\text{stg}} = \frac{c_p \mu_{\text{stg}}}{\lambda_{\text{stg}}} \end{aligned} \quad (22)$$

混合平均温度、全温度を次のように定義する：

$$\begin{aligned} T_b &= \int \rho u c_p T dA / \int \rho u dA, \\ T_T &= \left(\int \rho c_p u T dA + \int \rho u \frac{u^2}{2} dA \right) / \int \rho c_p u dA \end{aligned} \quad (23)$$

マイクロチューブ圧縮性流れにおける等温壁からの熱伝達の典型として、 $D = 25\mu\text{m}$, $L = 200D$ のチューブにおける $p_{\text{stg}} = 500\text{kPa}$, $p_b = 100\text{kPa}$ での計算結果をFig. 3に示す。ここで、チューブ壁面は $T_w = 310\text{K}$ の等温壁、貯気槽温度は $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ である。速度助走区間の長さは $0.06 \text{ Re} \cdot D$ と見積もることができる。この例では $\text{Re} = 332.1$ より入口からおよそ $20D$ ($= 0.5 \times 10^{-4}\text{ m}$)の地点までが助走区間であり、これより下流では速度分布はほぼ放物線形状になる。一方、流れはチューブに沿って入口から出口まで加速され、チューブ入口・出口のマッハ数はそれぞれ $\text{Ma}_{\text{in}} = 0.122$, $\text{Ma}_{\text{out}} = 0.578$ となる。この加速によって、気体の内部エネルギーが運動エネルギーに変換され、流速が増すほどに気体の静温が低下する。この場合の無次元全温度 $(T_T - T_b)/(T_w - T_{\text{stg}})$ とグレツ数の関係を通常の非圧縮層流熱伝達と比較したものをFig. 4に示す。また、チューブ壁面からの熱流束をFig. 4に示す。非圧縮層流熱伝達では、良く知られているように、グレツ数の増加に伴い無次元全温度は増加し、1に漸近する。しかしマイクロチューブの熱伝達では、無次元全温度の増加率が通常よりも大きくなり、およそ $Gz = 0.18$ のところで1に達する。そして、 $Gz > 0.18$ でも無次元全温度は増加を続け、チューブ出口($Gz_{\text{out}} = 0.84$)では1.38にまで達している。非圧縮層流熱伝達では、無次元全温度が1に近づくことで流体と壁面の温度差が減少し、熱流束は0に近づく。しかしマイクロチューブでは $Gz > 0.4$ から出口までの領域で大きな熱流束が生じている。これはFig. 3(b)に示すように、チューブ出口に向かって気体の静温低下が起こることで、壁面と流れの間に非圧縮性流体の場合にはない温度差が生じる為である。この熱流束によって、Asakoら^{9), 10)}が指摘する「追加の伝熱」が生じ、無次元全温度が1を超えて増大するのである。これがマイクロチューブ圧縮性流れの伝熱現象を構成するメカニズムの一つである。

通常の非圧縮層流熱伝達では、管の寸法や温度条件によらず無次元全温度をFig. 4の曲線で整理することができる。一方、マイクロチューブ圧縮性流れ

では、Fig. 4 の曲線はこの条件の場合のみこのようになるのであって、無次元全温度とグレツ数の関係は管の寸法 (D , L)、設定圧力比 (p_{stg} , p_b)、温度条件 (T_{stg} , T_w) によって変わることに注意する¹⁰⁾。

非圧縮層流熱伝達では、次式で定義されるヌセルト数を用いて熱伝達率を整理できる：

$$\text{Nu}_{\text{conv}} = D \dot{q} / \lambda_w (T_w - T_b) \quad (24)$$

ここで \dot{q} は管壁面からの熱流束である。Fig. 5 は非圧縮層流熱伝達と Fig. 3 のマイクロチューブ圧縮性流れの熱伝達それぞれについて、ヌセルト数とグレツ数の関係を示したものである。また Fig. 5 には、Fig. 3 のマイクロチューブ圧縮性流れで「粘性散逸がない」と理想化した（支配方程式のうち式(4)で $\phi = 0$ とした）流れのヌセルト数も示している。Fig. 5 を見ると、グレツ数の増加に対し、マイクロチューブ圧縮性流れのヌセルト数は通常のように 3.66 に漸近することなく、0 近くまで減少する。これは、粘性散逸の発熱で壁面近傍の気体温度が高くなることにより、壁面での気体の温度勾配が緩やかになる

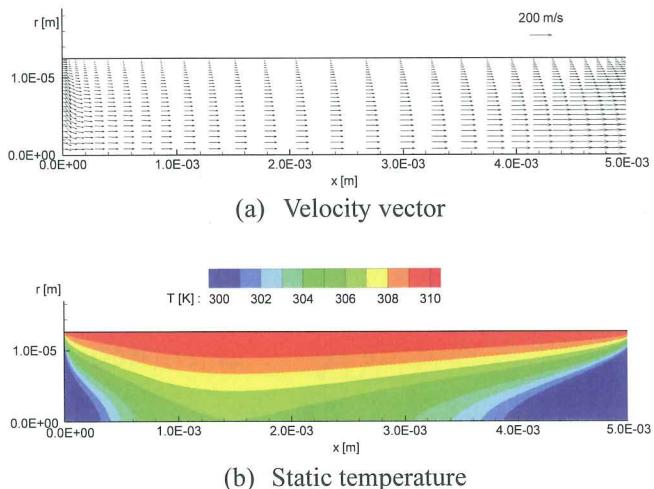


Fig. 3 Velocity vector and static temperature for the case of $D = 25\mu\text{m}$, $L = 200\text{D}$, $p_{\text{stg}} = 500\text{kPa}$ and $p_b = 100\text{kPa}$, $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ and $T_w = 310\text{K}$ ($\text{Re} = 332.1$)

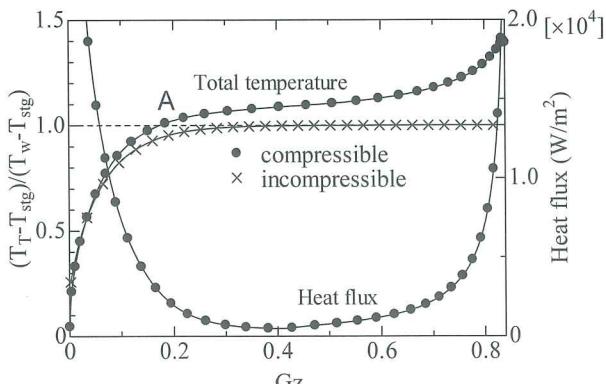


Fig. 4 Total temperature and heat flux as a function of G_z of flow in Fig. 3 ($G_z_{\text{out}} = 0.84$)

ためと考えられる。一方、粘性散逸なしと理想化したマイクロチューブ圧縮性流れでは、先述の「追加の伝熱」のため、ヌセルト数は非圧縮層流熱伝達よりも大きな値となっている。これらのことから、マイクロチューブ圧縮性流れでは、粘性散逸の発熱に起因する「伝熱の劣化」が生じていることが分かる。

以上の考察より、マイクロチューブ圧縮性流れでは、気体の静温低下による「追加の伝熱」と、粘性散逸の発熱による「伝熱の劣化」が、熱伝達率に対して同時に影響を及ぼしていることが分かる。

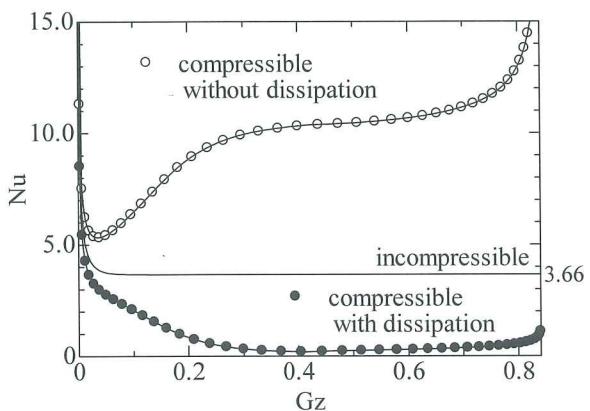


Fig. 5 Nusselt number as a function of Graetz number for the compressible flow in Fig. 3

4. 2 回復係数

等温壁からの熱伝達率を整理するため、断熱壁マイクロチューブ圧縮性流れの回復係数 rec を以下のように定義する²⁰⁾：

$$\text{rec} = \frac{T_{\text{adi},w} - T_{\text{adi},b}}{\bar{u}^2 / 2c_p} \quad (25)$$

繰り返しが、（等温壁ではなく）断熱壁の場合の数値計算結果から得る量であることを強調しておく。

$T_{\text{adi},w}$, $T_{\text{adi},b}$ はそれぞれ壁面での気体温度、および混合平均温度である。式(25)の分子は壁面（速度 0）の気体温度と混合平均温度の差、分母は動温であって、流れを等エントロピ的にせき止めたときの温度上昇が壁面（速度 0）の気体温度にどの程度寄与しているかの割合を表す。流れの粘性散逸を考慮して数値計算を行っているため（式(4)）、式(24)の回復係数にはこれによる発熱の影響も含まれている。

Table 3 に示すチューブ寸法、設定圧力比、貯気槽温度の組み合わせ 45 通りに対し、壁面を断熱壁として数値計算を行った。そして計算結果から、チューブ各地点での断面平均量、回復係数を求めた。チューブ入口から下流に、チューブ全長の 60%, 80%, 90%, 95% の地点におけるマッハ数と回復係数の値をまとめたところ、Fig. 6 のようになった。 $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ では、マッハ数が 0 に近いときの回復係数は 1.43 で、マッハ数が増えるにつれ回復係数の値は減

少した。そして Fig. 6 から分かるように、 $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ の回復係数はチューブ寸法や設定圧力比によらず、マッハ数のみに依存している。 $T_{\text{stg}} = 250\text{K}, 350\text{K}$ の場合も、各貯気槽温度ごとに回復係数がマッハ数のみに依存している。本研究の数値計算結果のうち、マッハ数が 0 に最も近いときの回復係数および貯気槽プラントル数は、 $T_{\text{stg}} = 250\text{K}$ のとき $\text{rec} = 1.453$,

$\text{Pr}_{\text{stg}} = 0.7268$ ($\text{Ma} = 0.020$)、 $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ のとき $\text{rec} = 1.431$ 、 $\text{Pr}_{\text{stg}} = 0.7160$ ($\text{Ma} = 0.031$)、 $T_{\text{stg}} = 350\text{K}$ のとき $\text{rec} = 1.406$ 、 $\text{Pr}_{\text{stg}} = 0.7036$ ($\text{Ma} = 0.013$) であった。非圧縮層流熱伝達の場合、回復係数はプランタル数に依存する²⁰⁾ため、これらの値について同様のことが成り立たないかを調べたところ、以下の整理式が得られた：

Table 3 Size, pressure and temperature conditions of the main runs for tubes with adiabatic

D [μm]	L	p_{stg} [kPa]	p_b [kPa]	T_{stg} [K]
25, 50, 100	800D	200, 400, 600, 800, 1000	100	250, 300, 350

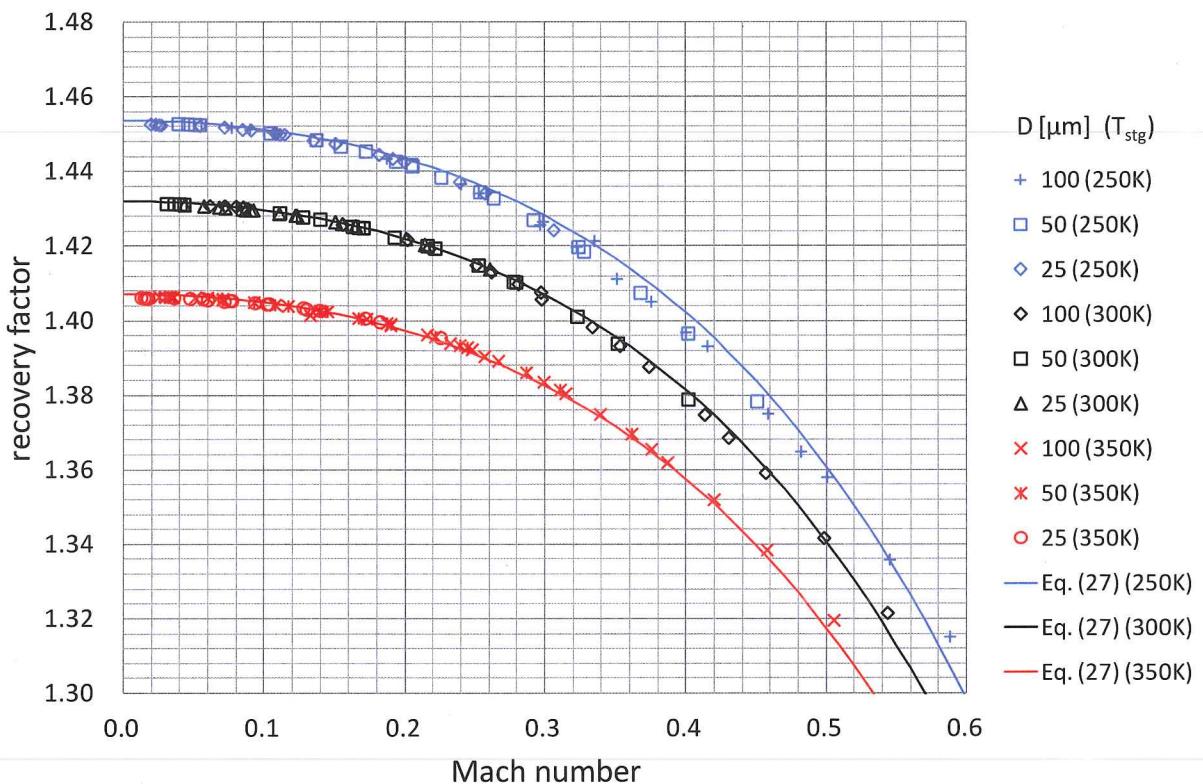


Fig. 6 Recovery factor as a function of Mach number

Table 4 Conditions of the supplementary runs for tubes with adiabatic walls

#	D [μm]	L	p_{stg} [kPa]	p_b [kPa]	T_{stg} [K]	Re_{stg}	Ma_{in}	Ma_{out}
1	100	200D	130	100	300	182.2	0.064	0.082
2	100	200D	200	100	300	675.4	0.155	0.299
3	100	200D	390	100	300	2132	0.258	0.846
4	100	100D	200	150	300	720.2	0.166	0.214
5	100	100D	300	200	300	1556	0.243	0.342
6	100	100D	390	260	300	2243	0.272	0.377
7	100	100D	550	500	300	1728	0.144	0.155
8	100	300D	160	100	300	271.9	0.077	0.122
9	100	300D	200	100	300	494.8	0.113	0.221
10	100	300D	400	100	300	1817	0.212	0.740
11	100	300D	200	50	300	580.5	0.133	0.500
12	100	400D	180	100	300	294.2	0.074	0.132
13	100	400D	400	100	300	1536	0.177	0.640
14	100	200D	200	100	350	484.3	0.134	0.261
15	100	200D	400	100	350	1674	0.238	0.810
16	10	50D	600	100	300	260.1	0.201	0.914
17	10	50D	800	100	300	402.9	0.236	1.034

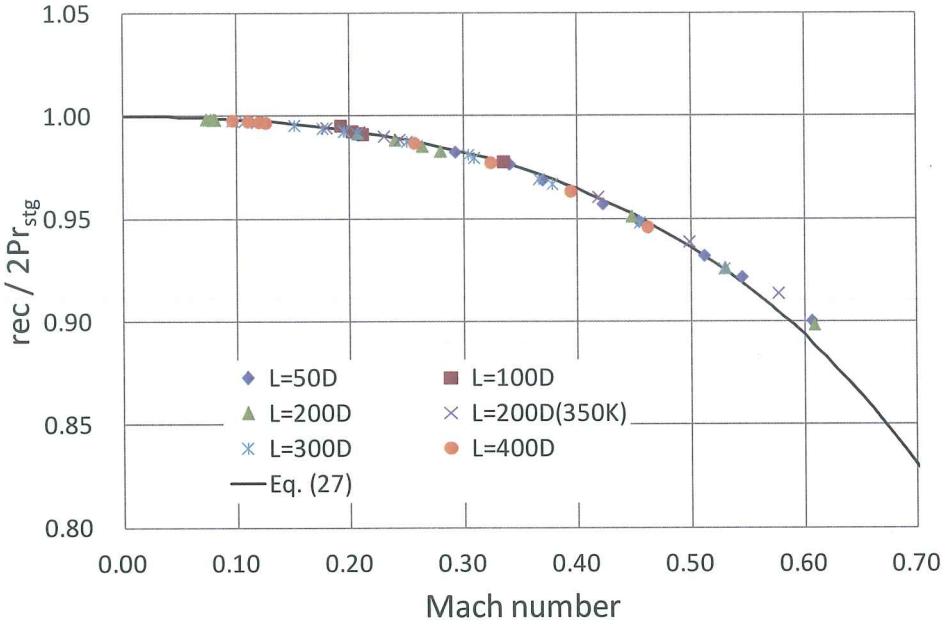


Fig. 7 Recovery factor for the cases of Table 4

$$\text{rec}|_{\text{Ma}=0} = -0.00151 + 2.00\text{Pr}_{\text{stg}} \approx 2\text{Pr}_{\text{stg}} \quad (26)$$

これを用いて、Fig. 6 の回復係数を以下の整理式にまとめることができる：

$$\text{rec} = 2\text{Pr}_{\text{stg}}(1 - 0.161\text{Ma}^2 - 0.377\text{Ma}^4) \quad (27)$$

$T_{\text{stg}} = 250\text{K}$, 300K , 350K の場合に式(27)で得られる曲線を Fig. 6 の中に示してある。さらに有効性検証のため、Table 3 では一定としていたチューブ長さ、背圧の条件を Table 4 のようにいろいろ変えて追加の数値計算を行った。この場合の回復係数とマッハ数の関係を式(27)と比較したものを Fig. 7 に示す。Fig. 6, Fig. 7 より、マイクロチューブ圧縮性流れの回復係数について、Table 3, Table 4 にまとめた種々の条件下式(27)が成り立つことが分かる。

4.3 局所ヌセルト数

局所ヌセルト数について考察する。非圧縮層流熱伝達の場合、ヌセルト数は式(24)で定義されるが、ここでは主流が高速となる圧縮性流体の物体まわりの熱伝達を整理するために文献 20)で提案されている定義

$$\text{Nu} = D\dot{q}/\lambda_w(T_w - T_{\text{adi},w}) \quad (28)$$

を用い、これを修正ヌセルト数とする。ここで、 $T_{\text{adi},w}$ は断熱壁面温度で、次式で定義する：

$$T_{\text{adi},w} = T_b + \text{rec} \cdot \bar{u}^2/2c_p \quad (29)$$

式(29)中の回復係数は、式(27)で Pr_{stg} を局所よどみ点プラントル数に置き換えて計算することにする。この理由は、断熱壁の場合は全温度はチューブ全体で貯気槽温度と等しくなるが、等温壁の場合は壁面からの伝熱により全温度が流れ方向に上昇するため、貯気槽温度ではなく局所全温度によってプラントル数を計算する方がそのときの気体の状態をよく表すと考えたからである。このようにして断熱平均温度

を計算するのは、等温壁であっても半径方向の温度回復が断熱壁の場合と同様に起こると仮定する、という意味である。

Table 5 に示すチューブ寸法、設定圧力比、壁面温度の組み合わせ 36 通りに対し、等温壁マイクロチューブの数値計算を行った。貯気槽温度は $T_{\text{stg}} = 300\text{K}$ とした。Table 5 の条件では、レイノルズ数の範囲は $34.70 \sim 2921$ 、チューブ出口マッハ数は $0.070 \sim 1.080$ となった。いくつかの計算例ではレイノルズ数が 2300 を超えたが、本論文で取り扱う範囲は層流に限定するものとし、乱流モデルを用いた計算は行っていない。

Fig. 4 の中で A で示すように、チューブ途中で、気体の全温度が壁面温度に達する（無次元全温度が 1 となる）地点のグレツ数を Gz_0 としよう：

$$Gz_0 = Gz \quad (\text{when } T_T = T_w) \quad (30)$$

すなわち、例えば (4.1 節で述べたように) Fig. 4 の例であれば $Gz_0 = 0.18$ である。（加速によって静温が低下しない）非圧縮性流体の場合には、 $Gz_0 < Gz$ では壁面から流体への伝熱は起こらない。したがって、マイクロチューブ圧縮性流れで、 $Gz_0 < Gz$ で起こる伝熱は、「追加の伝熱」のみが支配的要因と考えられる。一方 $Gz < Gz_0$ においては、非圧縮性流体の場合と同様、壁温と流れの全温度の差 $T_w - T_{\text{stg}}$ が主な支配的要因と考えられる。このように $Gz < Gz_0$ と $Gz_0 < Gz$ では壁面からの伝熱を起こしているメカニズムが異なるため、この 2 つの領域を分けて考えることにする。

しかし、 $Gz < Gz_0$ の範囲のみを考えても、式(24)で定義される通常のヌセルト数 Nu_{conv} では熱伝達率を整理することができない。Fig. 8 は、Table 5

の各場合において Nu_{conv} とグレツ数の関係を $Gz < Gz_0$ の範囲のみ示したものであるが、条件ごとに異なる曲線となっている。これは、4 章で考察したように、気体の静温低下と粘性散逸の発熱が影響しているためである。

一方、Table 5 の各場合について、式(28)で定義された修正ヌセルト数とグレツ数の $Gz < Gz_0$ の範囲における関係を Fig. 9 に示す。どの条件の場合も、修正ヌセルト数は非圧縮層流熱伝達の曲線と近い値をとっている。ただし Fig. 9 において、 $Gz < Gz_0$ であってもチューブ全長の 95% より下流にある値は除外した。この範囲では、チューブ出口近傍では気体が急激に加速され、修正ヌセルト数は非圧縮層流熱伝達の曲線より大きな値となる。しかし、出口近傍の急加速が起こる箇所はチューブ全長に対して小さいため、これを無視して整理しても伝熱量全体の予

測に対する影響は小さいと考える。以上のように、マイクロチューブ圧縮性流れの熱伝達率について次のように整理できる：

Nu (in Eq. (28))

= Nu_{conv} of incompressible laminar flow (31)

($Gz < Gz_0$, and not very near the outlet)

この結果の有効性を検証するため、Table 6 に示す条件で追加の数値計算を行った。Table 6 では、Table 5 で一定としていたチューブ長さ、背圧および貯気槽温度も変化させている。この数値計算結果から得られた修正ヌセルト数と式(31)を比較したものを Fig. 10 に示す。Fig. 9, Fig. 10 より、広範囲の寸法、圧力・温度条件に対して、熱伝達率を式(31)で整理できることが分かる。

修正ヌセルト数を用いることでマイクロチューブ圧縮性流れの熱伝達率を整理できる理由を考察する。

Table 5 Size, pressure and temperature conditions of the main runs for tubes with isothermal

D [μm]	L	p_{stg} [kPa]	p_b [kPa]	T_w [K]
25, 50, 100	200D	200, 300, 400, 500	100	310, 350, 375

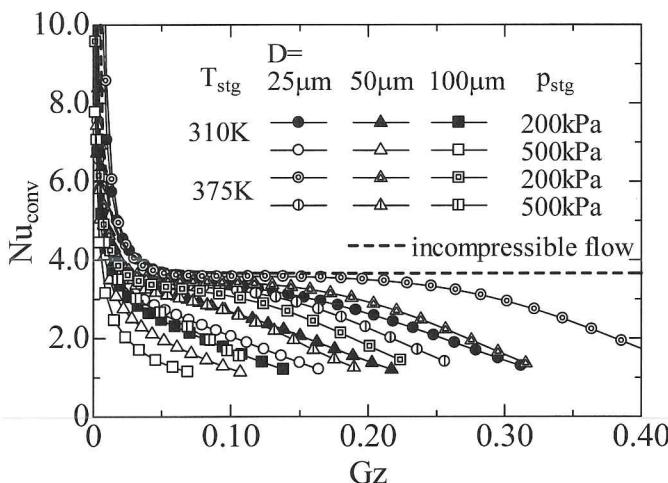


Fig. 8 The conventionally defined Nusselt number (Eq. (24)) as a function of Graetz number (for tubes with isothermal wall in Table 5)

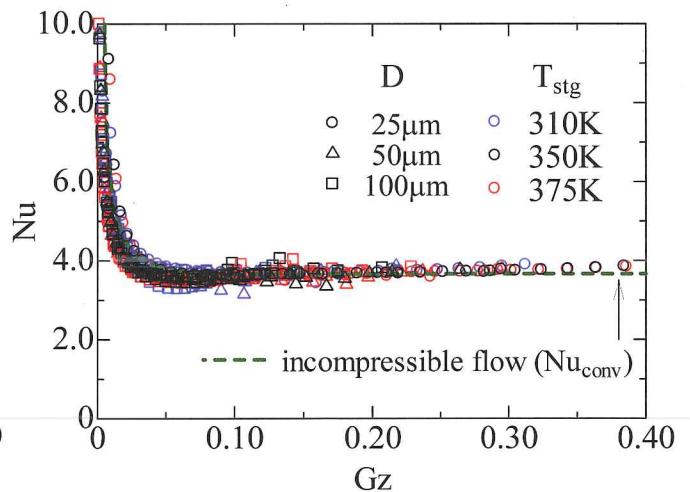


Fig. 9 The modified Nusselt number (Eq. (28)) as a function of Graetz number (for tubes with isothermal wall in Table 5)

Table 6 Size, pressure and temperature conditions of the main runs for tubes with isothermal walls

#	D [μm]	L	p_{stg} [kPa]	p_b [kPa]	T_{stg} [K]	T_w [K]	Re_{stg}	Ma_{in}	Ma_{out}
1	50	200D	200	100	250	300	223.3	0.080	0.174
2	50	200D	500	100	250	300	1278	0.188	0.879
3	50	200D	200	100	350	400	108.2	0.059	0.126
4	50	200D	500	100	350	400	685.7	0.153	0.734
5	50	200D	200	50	300	350	182.3	0.083	0.349
6	50	200D	500	50	300	350	916.9	0.169	1.081
7	50	200D	200	150	300	350	90.36	0.041	0.059
8	50	200D	500	150	300	350	897.8	0.165	0.553
9	50	400D	200	100	300	310	95.82	0.043	0.088
10	50	400D	800	100	300	310	1479	0.171	1.057
11	50	400D	200	100	300	375	69.34	0.031	0.070
12	50	400D	800	100	300	375	1161	0.133	0.971

まず、断熱壁の場合の回復係数は、加速による静温低下と粘性散逸の発熱の影響が同時に存在する状況下で、壁面の気体温度を算出するために求められた。したがって、これによって計算される断熱壁面温度 $T_{\text{adi},w}$ は、加速による静温低下と粘性散逸の発熱の影響をふまえた上で、チューブ各断面の温度を代表するものと考えられるからである。

1次元の連続の式、運動量保存の式、エネルギー方程式、および状態方程式を数値的に解くことで、機器の設計などの際に必要なマイクロチューブ圧縮性流れの伝熱量予測を行うことができる。1次元のエネルギー式は

$$c_p \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{dq}{dx} \quad (33)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{4\text{Nu}}{\rho u D^2} \lambda_w (T_w - T_{\text{adi},w}) \quad (34)$$

と表される。ここで α は運動エネルギー修正係数である。 $Gz < Gz_0$ の範囲では、式(34)の Nu として式(31)を用いればよいことは述べてきた通りである。一方、 α に関しては放物線速度分布を仮定するという方法も考えられるが、マイクロチューブ圧縮性流れでは層流であってもマッハ数が大きくなるにつれ速度分布形状が放物線と若干異なってくることが知られており^{3), 4)}、正確な伝熱量予測のためには α の詳細も明らかにする必要がある。また、「追加の伝熱」のみが支配的となる $Gz_0 < Gz$ の範囲で、計算しやすい形で熱伝達を整理しておく必要がある。これらについては今後の課題とする。

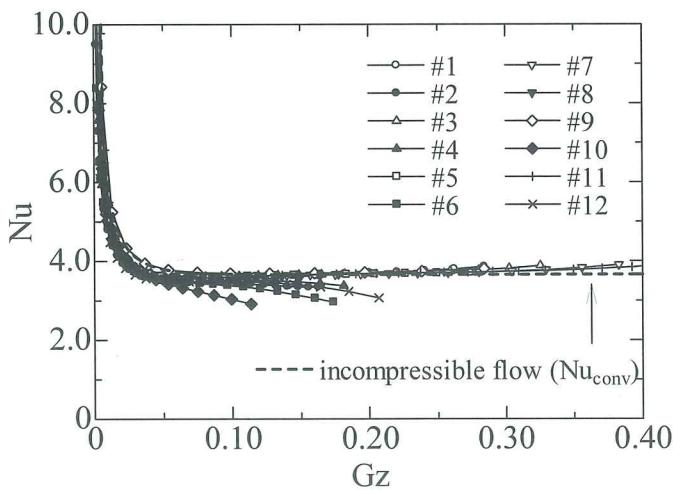


Fig. 10 The modified Nusselt number (Eq. (28)) as a function of Graetz number (for tubes with isothermal wall in Table 6)

5. 結言

本研究では、層流となる場合について等温壁マイクロチューブ内の圧縮性流れの数値計算を行い、ヌセルト数とグレツ数の関係が非圧縮層流熱伝達と異

なることのメカニズムを考察し、 $Gz < Gz_0$ の範囲で熱伝達率を整理する一つの方法を提案した。得られた結果を以下にまとめる。

(1) 断熱壁のマイクロチューブ圧縮性流れでは、壁面での気体温度は混合平均温度と動温によって表すことができる。このとき、回復係数はマッハ数とプラントル数に依存する：

$$T_{\text{adi},w} = T_b + \text{rec} \cdot \bar{u}^2 / 2c_p$$

$$\text{rec} = 2\text{Pr}_{\text{stg}} (1 - 0.161\text{Ma}^2 - 0.377\text{Ma}^4)$$

(2) 等温壁から熱伝達があるマイクロチューブ圧縮性流れにおいて、全温度が壁温より小さい範囲では、修正ヌセルト数とグレツ数の関係を非圧縮層流熱伝達と同じ曲線で整理することができる。

謝辞：本研究は平成 28 年度舞鶴工業高等専門学校機械工学科奨励研究経費の補助を受けて行われた。関係各位に謝意を表する。また、多くの有益なご指摘を下さった査読者各位に謝意を表する。

参考文献 :

- 1) D. B. Tuckerman and R. F. W. Pease : High-performance heat sinking for VLSI, IEEE Electron Device Letters, EDL-2, pp.126-129, 1981.
- 2) Y. Asako, T. Pi, S. E. Turner and M. Faghri : Effect of compressibility on gaseous flows in micro-channels, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.46, No.16, pp.3041-3050, 2003.
- 3) Y. Asako, K. Nakayama and T. Shinozuka : Effect of compressibility on gaseous flows in a micro-tube, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.48, No.23-24, pp.4985-4994, 2005.
- 4) 村上信太郎, 浅古豊 : 層流／乱流におけるマイクロチューブ圧縮性流れの局所管摩擦係数に関する研究, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.77, No.779, pp.1429-1444, 2011.
- 5) S. Murakami and Y. Asako : Local friction factor of compressible laminar or turbulent flow in micro-tubes, Proceedings of the ASME 2011 9th ICNMM, Edmonton, AB, ICNMM2011-58036, 2011.
- 6) S. V. Garimella and V. Singhal : Single-phase flow and heat transport in microchannel heat sinks, Proceedings of the 1st International Conference on Microchannels and Minichannels, ICMM2003-1018, pp.159-169, 2003.
- 7) P. Y. Wu and W. A. Little : Measurement of the heat transfer characteristics of gas flow in fine channel heat exchangers used for microminiature refrigerators, Cryogenics, Vol.24, No.8, pp.415-420, 1984.
- 8) S. B. Choi, R. F. Barron and R. O. Warrington : Fluid flow and heat transfer in micro tubes, Proceedings of ASME Winter Annual Meeting, Micromechanical Sensors,

- Actuators and Systems, DSC Vol.32, pp.123-134, 1991.
- 9) Y. Asako and H. Toriyama : Heat transfer characteristics of gaseous flows in microchannels, *Microscale Thermophysical Engineering*, Vol.9, pp.15-31, 2005.
 - 10) Y. Asako : Heat transfer characteristics of gaseous flow in a micro-tube, *Thermal Science and Engineering*, Vol.12, No.5, pp.31-37, 2004.
 - 11) Z. Y. Guo and Z. X. Li : Size effect on single-phase channel flow and heat transfer at microscale, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.24, No.3, pp.284-298, 2003.
 - 12) K. C. Karki : A calculation procedure for viscous flows at all speeds in complex geometries, PhD thesis, University of Minnesota, 1986.
 - 13) 日本機械学会編 : 機械工学便覧 基礎編 A6 熱工学, 丸善株式会社, 1985.
 - 14) 国立天文台編 : 理科年表, 丸善株式会社, 2006.
 - 15) Z. Xu and C. Zhao : Two-dimensional numerical simulation of shock waves in micro convergent-divergent nozzles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.50, No.11-12, pp.2434-2438, 2007.
 - 16) C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook : An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *Journal of Computational Physics*, Vol.14, No.3, pp.227-253, 1974.
 - 17) A. A. Amsden, H. M. Rupell and C. W. Hire : SALE a simplified ALE computer program of fluid flow at all speeds, Los Alamos Scientific Lab Rep., LA-8095, 1980.
 - 18) 村上信太郎, 浅古豊 : 等角写像を用いて任意の2次元単連結領域に直交曲線格子を生成する一数值計算法, 日本機械学会論文集B編, Vol.76, No. 768, pp.1214-1223, 2010.
 - 19) 村上信太郎, 浅古豊 : エネルギ式の熱伝導項の離散化を目的とした歪んだ四角形格子上における有限体積法に関する研究, 日本機械学会論文集B編, Vol.76, No. 772, pp.2178-2187, 2010.
 - 20) 西川兼康, 藤田恭伸 : 伝熱学, 理工学社, 1982.

(2018. 1. 12 受付)

LOCAL HEAT TRANSFER COEFFICIENT OF GASEOUS LAMINAR FLOW IN MICRO-TUBES

Shintaro MURAKAMI and Kaoru TOYODA

ABSTRACT : Gaseous laminar flows in micro-tubes with adiabatic walls or isothermal walls were simulated to investigate local heat transfer characteristics. The numerical procedure based on arbitrary-Lagrangian-Eulerian (ALE) method solves two-dimensional compressible momentum and energy equations. For convective heat transfer of gaseous flows in micro-tubes with isothermal walls, simultaneous effect of static temperature drop by flow acceleration and heat generation near the wall by viscous dissipation must be considered. So, the simulations were performed first for tubes with adiabatic walls to obtain the recovery factor, which means the recovery of kinetic temperature to wall temperature in the radial direction, at any reference point in a tube. Using this recovery factor, local heat transfer characteristics of micro-tubes with isothermal walls were reduced as the correlation between Nusselt number and Graetz number, although the definition of Nusselt number is altered as appropriate for high-speed gaseous flows. The working fluid is nitrogen gas. For the simulation of tubes with isothermal walls, the Reynolds number ranges from 35 to 2921, and the Mach number at the tube outlet ranges from 0.07 to 1.08. The tube diameter ranges from 10 μm to 100 μm and the aspect ratio of the tube length to diameter ranges from 50 to 200. The simulations include a wide range of size, temperature and pressure conditions to make the discussions and the conclusions more general ones.

Key Words : Convective heat transfer, Micro-tube, Gaseous flow, Local heat transfer coefficient, Numerical simulation