連鎖律の仮定を弱めることができないことを示す１つの反例

亀谷　睦[1]

要旨：合成関数の微分公式である連鎖律はよく知られている．この公式は微分可能関数についての定理であり，仮定を偏微分微分可能に弱めると，もはや成立しない．このことを明示する反例を与えることが，この論文の目的である．

キーワード：多変数関数の微分法，連鎖律，微分可能関数，偏微分可能関数

1. はじめに

多変数関数の合成関数の微分公式である連鎖律（2.3節の定理１）は，微分可能関数の合成関数に関する定理であって，その仮定を偏微分可能関数に弱めることはできない．このことを明示する反例（3.2節の例１）を与えることが，この論文の目的である．

論文の構成は以下のとおりである．第2節では，バナハ空間の開集合から別のバナハ空間への連続写像について，まず2.1節で微分可能性の概念を，2.2節ではバナハ空間が有限次元の場合に微分のヤコビ行列表示を，2.3節では連鎖律を，それぞれ復習する．そして，これらの準備の後に第3節で，我々の問題の提示とそれへの解答を述べる．

第2節，とくに2.1節と2.3節の定式化は，ディユドネ[1)]にしたがう．周知のようにディユドネは数学者集団ブルバキの創立メンバーの一人である．彼の教科書では「微積分の基本概念は，その概念の展望，威力，本性が充分な一般性において開示される枠においた方が，古典解析の通常の限界におくよりもずっとよい」（ディユドネ[1)]の序文から引用）との考え方が徹底されており，原著の出版から半世紀を経た今日においても，この教科書から学ぶべきものは多いと思われるからである．

2. 微分と連鎖律の復習

2.1 関数の微分可能性（一般の場合）

この節では関数の微分可能性を復習する．

まず，次の２つの定義から始めよう．

定義 1 線形空間Eが**実バナハ空間**であるとは，Eが実数体上の線形空間で，ノルム$\|\cdot\|_E$をもち，ノルムが誘導する距離に関してEが完備なときをいう．■

定義 2 E, Fは実バナハ空間，AはEの開集合，fとgはAからFへの連続写像とする．$x_0 \in A$について，**fとgがx_0で接する**とは，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = 0 \qquad (1)$$

となるときをいう．■

fとgがx_0で接するとき，$f(x_0) = g(x_0)$である．また，「x_0で接する」という二項関係は同値関係である．とくに，fとg，gとhがそれぞれx_0で接するとき，fとhもx_0で接する（同値関係の推移律）．

補題 1 x_0でfに接する関数のなかで，**線形な**uで$x \mapsto f(x_0) + u(x - x_0)$の形になるものは，存在するとしても１つだけである．□

証明 1 （補題１の証明）このようなものが２つあったとして，$x \mapsto f(x_0) + u_j(x - x_0)$ $(j = 1, 2)$とする．このとき，同値関係(1)の推移律から，これら２つの写像もx_0で接するので，線形写像$v = u_1 - u_2$は

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|v(y)\|_F}{\|y\|_E} = 0 \qquad (2)$$

をみたす．この(2)から，任意の$\varepsilon > 0$に対し，ある$r > 0$を選んで，$\|y\|_E \le r$ならば$\|v(y)\|_F \le \varepsilon \|y\|_E$とできる．すると，すべての$x \in E$ $(x \neq 0)$に対して，$y = rx/\|x\|_E$ととれば

$$\frac{r}{\|x\|_E} \|v(x)\|_F = \|v(y)\|_F \le \varepsilon \|y\|_E = \varepsilon \frac{r}{\|x\|_E} \|x\|_E$$

となるから，$\|v(x)\|_F \le \varepsilon \|x\|_E$がすべての$x \in E$に対して成り立つ．ところが，$\varepsilon$は任意であるので，すべての$x \in E$について$v(x) = 0$となる．□

1 舞鶴工業高等専門学校 自然科学部門 教授

定義 3 E, Fは実バナハ空間，AはEの開集合，fはAからFへの連続写像とする．fが$x_0 \in A$で**微分可能**であるとは，$x \mapsto f(x_0) + u(x - x_0)$が$x_0$で$f$に接するような線形写像$u$が存在するときをいう． ■

このとき，補題 1 からuは一意的である．このuをfのx_0での**微分**（または**全微分**）といい，$f'(x_0)$または$Df(x_0)$で表す．

補題 2 $f(x)$がx_0で微分可能であるとき，微分$f'(x_0)$はEからFへの**連続**線形写像である． □

証明 2 （補題 2 の証明）$u = f'(x_0)$とする．fの連続性と微分の定義から，任意の$\varepsilon > 0$に対し，$0 < r < 1$なるあるrをとれば，$\|t\|_E \leq r$ならば

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\|_F \leq \frac{\varepsilon \|t\|_E}{2}$$

が成り立つようにできる．ゆえに，$\|t\|_E \leq r$ならば

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_F &\leq \|u(t) - f(x_0 + t) + f(x_0)\|_F \\ &\quad + \|f(x_0 + t) - f(x_0)\|_F \\ &\leq \frac{\varepsilon \|t\|_E}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

となる．したがって，uは$t = 0$で連続である．ところがuは線形なので，すべての$x \in E$に対して$u(x + t) - u(x) = u(t)$となる．よって，uはEで連続である． □

補題 2 から，AからFへの連続写像fの$x_0 \in A$での微分$f'(x_0)$は，存在するとすれば，EからFへの連続線形関数のなす実バナハ空間$L(E : F)$の要素であって，Fの要素ではないことがわかる．以下では，線形関数uについて，その値$u(t)$を$u \cdot t$と表す．

2.2　有限次元の場合の微分の表示

この節では，実バナハ空間E, Fがともに**有限次元**で，$n = \dim E, m = \dim F$の場合に，EからFへの線形写像である微分$f'(x_0)$の行列による表示について復習する．EとFの基底をそれぞれ$e_1, \cdots, e_n$と$f_1, \cdots, f_m$とすれば，$x \in E$と$y \in F$をそれぞれ

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j, \quad y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i \tag{3}$$

と表すことができる．関係式(3)によって，$x \in E$と$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$，$y \in F$と$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$が，それぞれ同一視できる．

大事なのは，これらの同一視がバナハ空間としての同型を与えること，すなわち，たとえばyとηの同一視に対して，次が成り立つことである：

補題 3 Fのノルム$\|y\|_F$と$\mathbb{R}^m$のユークリッドノルム$\|\eta\|_2 = \left(\eta_1^2 + \cdots + \eta_m^2\right)^{1/2}$は同値なノルムである．すなわち，ある定数$a \geq 1$が存在して，(3)により対応する任意の$y \in F$と$\eta \in \mathbb{R}^m$に対して

$$a^{-1} \|\eta\|_2 \leq \|y\|_F \leq a \|\eta\|_2 \tag{4}$$

が成り立つ． □

証明 3 （補題 3 の証明）不等式(4)のうち，右側の不等式はシュワルツの不等式による．実際，(3)の下で，aを$a \geq \left(\|f_1\|_F^2 + \cdots + \|f_m\|_F^2\right)^{1/2}$ととれば

$$\begin{aligned}\|y\|_F = &\left\| \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i \right\|_F \leq \sum_{i=1}^{m} |\eta_i| \, \|f_i\|_F \\ &\leq \left(\eta_1^2 + \cdots + \eta_m^2\right)^{1/2} \left(\|f_1\|_F^2 + \cdots + \|f_m\|_F^2\right)^{1/2} \\ &\leq a \, \|\eta\|_2\end{aligned}$$

が成り立つからである．

次に(4)の左側の不等式を背理法で示そう．この不等式の成立を否定すれば，aをどのように大きくとっても，aに応じて

$$y^{(a)} = \sum_{i=1}^{m} \eta_i^{(a)} f_i$$

を，不等式$a^{-1} \|\eta^{(a)}\|_2 > \|y^{(a)}\|_F$をみたすように選べることになる．したがって，$a = \nu = 1, 2, 3, \cdots$ととり，$\|\eta^{(\nu)}\|_2 = 1$と正規化すれば，$\mathbb{R}^m$の要素からなる列$\{\eta^{(\nu)}\}$を

$$\|\eta^{(\nu)}\|_2 = 1, \quad \left\| \sum_{i=1}^{m} \eta_i^{(\nu)} f_i \right\|_F \to 0 \ (\nu \to \infty)$$

となるように選べる．このとき，列$\{\eta^{(\nu)}\}$は$\mathbb{R}^m$の有界列であるから，この列は収束部分列$\{\eta^{(\nu_k)}\}$を含む（ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理）．この部分列の極限をη^0とすれば，

$$\|\eta^0\|_2 = \lim_{k \to \infty} \|\eta^{(\nu_k)}\|_2 = 1,$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \eta_i^0 f_i \right\|_F = \lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{m} \eta_i^{(\nu_k)} f_i \right\|_F = 0$$

となる．この第 2 式から，各iについて$\eta_i^0 = 0$がいえて$\eta^0 = 0$となるが，これは上の第 1 式と矛盾する．ゆえに，(4)の左側の不等式が成り立つ． □

さて，同一視(3)を用いて，写像fを

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\xi_1, \cdots \xi_n) f_i \tag{5}$$

と表すとき，次が成り立つ：

補題 4 $\xi^0 = (\xi_1^0, \cdots, \xi_n^0)$ を $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^0 e_j$ で定める．f が x_0 で微分可能であれば，スカラー値関数 φ_i は ξ^0 において偏微分可能で，$f'(x_0)$ は $t = \sum_{j=1}^{n} \tau_j e_j \in E$ を次の点に移す：

$$f'(x_0) \cdot t = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}(\xi^0)\, \tau_j \right) f_i \in F. \tag{6}$$

したがって，微分 $f'(x_0)$ は m 行 n 列のヤコビ行列 $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}(\xi^0) \right)$ と同一視できる． □

証明 4 （補題 4 の証明）f の微分可能性から，h を実数，$j = 1, \cdots, m$ として，次の関係式がなりたつ．

$$f(x_0 + he_j) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot he_j + o(he_j),$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{\|o(he_j)\|_F}{\|he_j\|_E} = 0.$$

この第 1 式を座標表示(5)を用いて書き直すと，

$$f'(x_0) \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} f_i, \quad o(he_j) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{ij}(h)\, f_i$$

により定数 C_{ij} とスカラー値関数 $\varepsilon_{ij}(h)$ を定めて

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0 + h, \cdots, \xi_n^0)\, f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0, \cdots, \xi_n^0) + hC_{ij} + \varepsilon_{ij}(h) \right\} f_i$$

となる．ゆえに，$i = 1, \cdots, m$ に対して

$$\varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0 + h, \cdots, \xi_n^0)$$
$$= \varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0, \cdots, \xi_n^0) + hC_{ij} + \varepsilon_{ij}(h)$$

がいえる．ところが補題 3 から，ある $a \geq 1$ があって，各 i について

$$|\varepsilon_{ij}(h)| \leq \|(\varepsilon_{1j}(h), \cdots, \varepsilon_{mj}(h))\|_2 \leq a\|o(he_j)\|_F$$

が成り立つ．ゆえに

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\varepsilon_{ij}(h)|}{|h|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{a\|o(he_j)\|_F}{\|e_j\|_E^{-1}\, \|he_j\|_E}$$
$$= a\|e_j\|_E \lim_{h \to 0} \frac{\|o(he_j)\|_F}{\|he_j\|_E} = 0$$

が成り立つ．これより

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}(\xi^0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{ \varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0 + h, \cdots, \xi_n^0)$$
$$- \varphi_i(\xi_1^0, \cdots, \xi_j^0, \cdots, \xi_n^0) \}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(C_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij}(h)}{h} \right) = C_{ij}$$

がいえて，φ_i は ξ^0 において偏微分可能である．さらに，$f'(x_0)$ の線形性と定数 C_{ij} の定め方から

$$f'(x_0) \cdot t = f'(x_0) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \tau_j e_j \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \tau_j f'(x_0) \cdot e_j = \sum_{j=1}^{n} \tau_j \sum_{i=1}^{m} C_{ij} f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}(\xi^0)\, \tau_j \right) f_i$$

がいえ，(6)が成り立つ． □

2.3 連鎖律

この節では，合成関数の微分公式である連鎖律を定式化とその証明を復習する．2.1節に引き続きここでも，定式化はディユドネ[1]にしたがう．

連鎖律と呼ばれるのは次の定理である．

定理 1 （連鎖律）E, F, G は実バナハ空間，A は $x_0 \in E$ の開近傍，f は A から F への連続写像で $y_0 = f(x_0)$ とする．また，B を y_0 の開近傍で $f(A) \subset B$ となるもの，g は B から G への連続写像とする．もし，f が x_0 で微分可能，g が y_0 で微分可能であれば，$h = g \circ f$ は x_0 で微分可能である．さらに，

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0) \tag{7}$$

が成り立つ． □

証明 5 （定理 1 の証明）f と g の微分可能性の仮定から，$0 < \varepsilon < 1$ なる任意の ε に対して，ある $r > 0$ をとって，$\|s\|_E \leq r$, $\|t\|_F \leq r$ について

$$f(x_0 + s) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot s + o_1(s),$$
$$g(y_0 + t) = g(y_0) + g'(y_0) \cdot t + o_2(t),$$
$$\|o_1(s)\|_F \leq \varepsilon\|s\|_E, \quad \|o_2(t)\|_G \leq \varepsilon\|t\|_F$$

とできる．他方，補題 2 から $f'(x_0)$ と $g'(y_0)$ は連続線形写像であるので，正定数 a, b をとって，任意の $s \in E, t \in F$ について

$$\|f'(x_0) \cdot s\|_F \leq a\|s\|_E, \quad \|g'(y_0) \cdot t\|_G \leq b\|t\|_F$$

とできる．ゆえに，$\|s\|_E \leq r$ ならば

$$\|f'(x_0) \cdot s + o_1(s)\|_F \leq (a + \varepsilon)\|s\|_E \leq (a + 1)\|s\|_E$$

となる．したがって，$\|s\|_E \leq r/(a+1)$ ならば

$$\|o_2\left(f'(x_0) \cdot s + o_1(s)\right)\|_G \leq (a+1)\varepsilon\|s\|_E,$$
$$\|g'(y_0) \cdot o_1(s)\|_G \leq b\varepsilon\|s\|_E$$

が成り立つ．そこで，

$$\begin{aligned} h(x_0+s) &= g\left(y_0 + f'(x_0)\cdot s + o_1(s)\right) \\ &= g(y_0) + g'(y_0)\cdot\left(f'(x_0)\cdot s + o_1(s)\right) \\ &\quad + o_2\left(f'(x_0)\cdot s + o_1(s)\right) \\ &= g(y_0) + g'(y_0)\cdot\left(f'(x_0)\cdot s\right) + o_3(s) \end{aligned}$$

としたとき，$\|o_3(s)\|_G \leq (a+b+1)\varepsilon\|s\|_E$となって，証明が終わる．□

連鎖律は，関数の合成という操作が微分可能性を保存することを主張している．この部分が定理1の主要部である．とくに，E, F, Gが何れも有限次元である場合を考えよう．$n=\dim E$, $m=\dim F$, $\ell=\dim G$として，E, F, Gの基底をそれぞれ，$e_1, \cdots, e_n$と$f_1, \cdots, f_m$および$g_1, \cdots, g_\ell$として，fの座標表示(5)とgの座標表示

$$y=\sum_{i=1}^{m}\eta_i f_i \mapsto g(y)=\sum_{k=1}^{\ell}\psi_k(\eta_1, \cdots \eta_m)\, g_k \qquad (8)$$

を用いる．このとき，定理1と補題4を組み合わせて，$h=g\circ f$の微分を表す等式(7)を次のような行列の等式に書き直せる：

$$\left(\frac{\partial(\psi\circ\varphi)_k}{\partial\xi_j}(\xi^0)\right)=\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial\eta_i}(\eta^0)\right)\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}(\xi^0)\right). \qquad (9)$$

3. 我々の問題とその解答

3.1 問題の提示

有限次元の場合の連鎖律であるこの(9)は，微分積分学のどの教科書にもある（たとえば笠原[2]）．ところが，一般の等式(7)よりもその特殊なケースである(9)の方がはるかに有名なため，肝心の微分可能性の仮定は忘れられがちである．とくに，式(9)の右辺は$\varphi_i(\xi)$や$\psi_k(\eta)$が偏微分可能でありさえすれば定義できるために，連鎖律が「偏微分可能な関数の合成は偏微分可能である」という形で成立することを期待する人がいるかもしれない．

そこで，次の問題を考える．

問題 1「偏微分可能な関数の合成は偏微分可能である」は正しいか？ ■

しかし，次節で示すように，この問題1の答は否定的である．問題1の鍵かっこ内の主張には反例が作れるからである．

3.2 問題1への否定的解答

この節では，問題1への否定的解答（反例）を与える．E, F, Gは何れも有限次元の実バナハ空間で，$\dim E=\dim G=1$, $\dim F=2$とする．そして，E, F, Gの基底をそれぞれ，e_1とf_1, f_2およびg_1として，写像f, gの座標表示をそれぞれ

$$\begin{aligned} x=\xi e_1 &\mapsto f(x)=\varphi_1(\xi)\,f_1+\varphi_2(\xi)\,f_2 \\ y=\eta_1 f_1+\eta_2 f_2 &\mapsto g(y)=\psi(\eta_1, \eta_2)\,g_1 \end{aligned}$$

とする．この対応によって，fは1変数ξの関数の組$(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))$と，$g$は2変数$(\eta_1, \eta_2)$の関数$\psi(\eta_1, \eta_2)$と，それぞれ同一視することができる．

そこで，まず1変数ξの関数(φ_1, φ_2)を

$$\varphi_1(\xi)=e^{\xi},\ \ \varphi_2(\xi)=\log\xi\ \ (\xi>0) \qquad (10)$$

ととる．この(φ_1, φ_2)は明らかに微分可能である．また，$(\varphi_1(1), \varphi_2(1))=(e, 0)$である．

問題1の反例を作るには，$(\eta_1, \eta_2)=(e, 0)$において偏微分可能だが微分可能ではない関数$\psi(\eta_1, \eta_2)$を選んで，合成関数$h(x)=(g\circ f)(x)$，すなわち，$\psi(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))=\psi(e^{\xi}, \log\xi)$が$\xi=1$で微分可能でないようにすればよい．

我々の目的は次の例を示すことである：

例 1 関数ψとして，次のものをとる：

$$\psi(\eta_1, \eta_2)=\begin{cases} \dfrac{(\eta_1-e)^2+\eta_2^2}{\eta_1-e-e\eta_2} & (\eta_1-e\neq e\eta_2) \\ 0 & (\eta_1-e=e\eta_2) \end{cases} \qquad (11)$$

このとき，(10)と(11)の合成関数$\psi(e^{\xi}, \log\xi)$は$\xi=1$で微分不可能である．■

例1を示すために，まず次の2つの補題を示そう．

補題 5 上の(11)で定まる関数$\psi(\eta_1, \eta_2)$は，$(e, 0)$において，偏微分可能であるが連続ではない．したがって，$\psi(\eta_1, \eta_2)$はこの点において微分可能でない．□

証明 6（補題5の証明）前半の偏微分可能性は

$$\psi(\eta_1, 0)=\begin{cases} \dfrac{(\eta_1-e)^2}{\eta_1-e}=\eta_1-e & (\eta_1\neq e) \\ 0 & (\eta_1=e) \end{cases}$$

から

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}(e, 0)=\lim_{\eta_1\to e}\frac{\psi(\eta_1, 0)-\psi(e, 0)}{\eta_1-e}=1$$

となること，および

$$\psi(e, \eta_2)=\begin{cases} \dfrac{\eta_2^2}{-e\eta_2}=-\dfrac{\eta_2}{e} & (\eta_2\neq 0) \\ 0 & (\eta_2=0) \end{cases}$$

から

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}(e, 0)=\lim_{\eta_2\to 0}\frac{\psi(e, \eta_2)-\psi(e, 0)}{\eta_2}=-\frac{1}{e}$$

となることからわかる．

後半の不連続性については，直線$\eta_1 - e = e\eta_2$に沿って点(η_1, η_2)が$(e, 0)$へ近づくならば，$\psi(\eta_1, \eta_2)$の極限は0であることに，まず注意する．次に，$c \neq 0$のときの$\psi(\eta_1, \eta_2) = 2c$という等高線を考えると，これは点$(e, 0)$を通る円

$$(\eta_1 - e - c)^2 + (\eta_2 + ce)^2 = c^2(1 + e^2) \tag{12}$$

から1点$(e, 0)$を除いた円弧になるので，この円弧に沿って点(η_1, η_2)が$(e, 0)$に近づくとき，$\psi(\eta_1, \eta_2)$の極限は$2c (\neq 0)$である．したがって，$(\eta_1, \eta_2) \to (e, 0)$のときの$\psi(\eta_1, \eta_2)$の極限は存在しない．ゆえに，$\psi(\eta_1, \eta_2)$は点$(e, 0)$において不連続になる．□

補題6 式(10)の$(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)) = (e^\xi, \log\xi)$ $(\xi > 0)$は，曲線$\eta_2 = \log(\log\eta_1)$ $(\eta_1 > 1)$のパラメータ表示である．この曲線は閉半平面$\eta_1 - e \geq e\eta_2$に含まれる．さらに，曲線が半平面の境界である直線$\eta_1 - e = e\eta_2$と出会うのは，$(\eta_1, \eta_2) = (e, 0)$のとき，かつ，そのときに限る．□

証明7 （補題6の証明）最初の主張は，$(\eta_1, \eta_2) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))$のとき，$\eta_2 = \log\xi = \log(\log e^\xi) = \log(\log\eta_1)$となることから明らかである．そこで，この曲線$\eta_2 = \log(\log\eta_1)$が閉半平面に含まれることをいう．それには，不等式

$$\log(\log\eta_1) \leq \frac{1}{e}(\eta_1 - e) \quad (\eta_1 > 1) \tag{13}$$

がなりたち，不等式(13)において等号が成り立つのは$\eta_1 = e$のとき，かつ，そのときに限ることをいえばよい．そこで，

$$\lambda(\eta_1) := \frac{1}{e}(\eta_1 - e) - \log(\log\eta_1) \ (\eta_1 > 1)$$

とおく．これを微分して

$$\lambda'(\eta_1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{\eta_1\log\eta_1} = \frac{\eta_1\log\eta_1 - e}{e\eta_1\log\eta_1}$$

である．この右辺の分母は$\eta_1 > 1$において正であるから，右辺の分子を$\mu(\eta_1) := \eta_1\log\eta_1 - e$とおくと，$\lambda'(\eta_1)$の符号は$\mu(\eta_1)$の符号と一致する．

さて，$\mu'(\eta_1) = 1 + \log\eta_1$だから，$\mu'(\eta_1)$は$\eta_1 = e^{-1}$の前後で1度だけ負から正へ符号を変える．したがって，$\mu(\eta_1)$は$\eta_1 > e^{-1}$において増加し，とくに$\eta_1 > 1$のときも増加で，その値域は$\mu(\eta_1) > \mu(1) = -e$である．したがって，$\mu(\eta_1)$が$\eta_1 > 1$において符号を変えるのは，$\eta_1 = e$の前後においてだけであり，その符号変化は負から正へである．この符号変化は$\lambda'(\eta_1)$の符号変化と一致するので，$\lambda(\eta_1)$は，$1 < \eta_1 < e$で減少し，$\eta_1 > e$で増加する．したがって，$\lambda(\eta_1) \geq \lambda(e) = 0$がいえて，不等式(13)が成り立つ．

さらに上の証明から，$\lambda(\eta_1) = 0$となるのは，$\eta_1 = e$のとき，かつ，そのときに限ることもわかる．□

証明8 （例1の証明）背理法により例1を示す．まず，合成写像$h = g \circ f$に対応するのは関数$\psi(e^\xi, \log\xi)$であることに注意する．そこで，$\rho(\xi) := \psi(e^\xi, \log\xi)$とおく．上の補題6から，$\xi \neq 1$のとき

$$\rho(\xi) = \frac{(e^\xi - e)^2 + (\log\xi)^2}{e^\xi - e - e\log\xi} \tag{14}$$

であり，$\xi = 1$のときには$\rho(1) = \psi(e, 0) = 0$であることがわかる．もし，$\rho(\xi)$が$\xi = 1$で微分可能だと仮定すれば，

$$\rho'(1) = \lim_{\xi \to 1}\frac{\rho(\xi) - \rho(1)}{\xi - 1} = \lim_{\xi \to 1}\frac{\rho(\xi)}{\xi - 1}$$

が存在し，これより，$\rho(\xi)$は

$$\lim_{\xi \to 1}\rho(\xi) = \lim_{\xi \to 1}\frac{\rho(\xi)}{\xi - 1}(\xi - 1) = \rho'(1) \times 0 = 0 \tag{15}$$

をみたすことになる．ところが，以下に示すように，(15)とは両立しえない次の等式が成り立つ：

$$\lim_{\xi \to 1}\rho(\xi) = \frac{e^2 + 1}{e}. \tag{16}$$

さて，上の等式(16)を証明するため，等式(14)において$\xi = 1 + \theta$とおくと，$\theta \neq 0$のとき

$$\rho(1 + \theta) = \frac{e^2(e^\theta - 1)^2 + (\log(1 + \theta))^2}{e(e^\theta - 1 - \log(1 + \theta))} \tag{17}$$

となる．ここで，$\theta \to 0$のときのよく知られた漸近展開

$$e^\theta - 1 = \theta + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2), \quad \log(1 + \theta) = \theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

を用いると，(17)の分子と分母は，それぞれ

$$\begin{aligned}
&e^2\left(\theta + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right)^2 + \left(\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right)^2 \\
&= (e^2 + 1)\,\theta^2\,(1 + o(1)), \\
&e\left(\theta + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) - \left(\theta - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right)\right) \\
&= e\,\theta^2\,(1 + o(1))
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，(17)は

$$\rho(1 + \theta) = \frac{(e^2 + 1)\,\theta^2\,(1 + o(1))}{e\,\theta^2\,(1 + o(1))} = \frac{e^2 + 1}{e}(1 + o(1))$$

となる．これより$\theta \to 0$として，結論の(16)を得る．この(16)は(15)と両立しないので，矛盾である．□

3.3 反例への1つの裏付け

最後に，等式(16)が成立する理由を別の観点から裏付けておこう．等式(16)の左辺は，曲線$\eta_2 = \log(\log\eta_1)$ $(\eta_1 > 1)$に沿って点(η_1, η_2)を$(e, 0)$に

近づけたときの関数$\psi(\eta_1, \eta_2)$の極限である．それが等式(16)の右辺の値$(e^2+1)/e$に等しくなるということは，この曲線がψの等高線$\psi(\eta_1, \eta_2) = (e^2+1)/e$にほぼ一致すること，より正確にいえば，この等高線と曲線$\eta_2 = \log(\log \eta_1)$が点$(e, 0)$において同じ2次近似をもつことを示唆する．

これが正しいことは以下のようにして確かめられる．任意の$c \neq 0$に対し等高線$\psi(\eta) = 2c$と曲線$\eta_2 = \log(\log \eta_1)$が点$(e, 0)$において同じ1次近似をもつことはあきらかである．ゆえに，等高線と曲線それぞれの第2次導関数の$\eta_1 = e$での値が等しくなるcの値を求めればよい．補題6により，曲線$\eta_2 = \log(\log \eta_1)$は直線$\eta_1 - e = e\eta_2$の下側にあり，点$(e, 0)$において両者は接している．したがって，この曲線は上に凸であり，この曲線と同じ2次近似をもつ等高線も点$(e, 0)$において上に凸となる．ここで，等高線$\psi(\eta) = 2c$の表示(12)を思い出そう．この等高線は点$(e+c, -ce)$を中心とする円から1点$(e, 0)$を除いた円弧だったから，この円弧が点$(e, 0)$において上に凸となるためには，$c > 0$が必要である．さらに，$c > 0$のとき，点$(e, 0)$は等高線（円弧）の上半部分$\eta_2 \geq -ce$にあるので，円弧のうち上半部分のみを考えればよく，等高線の方程式は

$$\eta_2 = -ce + \left(c^2(1+e^2) - (\eta_1 - e - c)^2\right)^{1/2}$$

だとしてよい．この右辺の第2次導関数を求めると

$$\frac{d\eta_2}{d\eta_1} = \frac{-(\eta_1 - e - c)}{(c^2(1+e^2) - (\eta_1 - e - c)^2)^{1/2}},$$
$$\frac{d^2\eta_2}{d\eta_1^2} = \frac{-c^2(e^2+1)}{(c^2(1+e^2) - (\eta_1 - e - c)^2)^{3/2}}$$

となり，これより

$$\left.\frac{d^2\eta_2}{d\eta_1^2}\right|_{\eta_1 = e} = -\frac{1+e^2}{ce^3} \tag{18}$$

がわかる．

他方，$\eta_2 = \log(\log \eta_1)$の第2次導関数は

$$-\frac{1 + \log \eta_1}{\eta_1^2 (\log \eta_1)^2}$$

であるので，その$\eta_1 = e$での値は$-2/e^2$である．よって，(18)の右辺の値が$-2/e^2$となるような$2c$の値を求めるとよいが，それは$2c = (1+e^2)/e$である．したがって，等高線$\psi(\eta) = (1+e^2)/e$と曲線$\eta_2 = \log(\log \eta_1)$ $(\eta_1 > 1)$は点$(e, 0)$において同じ2次近似をもつ．

謝辞：本研究は，本校の同僚との定期試験の出題をめぐる雑談から派生したものである．雑談に応じていただいた奥村昌司氏と岡田浩嗣氏に謝意を表する．

参考文献：

1) ディユドネ，J.: 現代解析の基礎１（森毅訳），東京図書，1971. (Diudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1960.)

2) 笠原浩司：微分積分学，サイエンス社，1974.

(2016.12.16受付)

A COUNTER EXAMPLE WHICH SHOWS THE FACT THAT THE ASSUMPTION OF THE CHAIN RULE CANNOT BE WEAKENED

Makoto KAMETANI

ABSTRACT: The chain rule is well-known as a differential formula for composite functions. This formula is valid for differentiable functions but it is invalid for partially differentiable functions. The purpose of this article is to give a counter example which shows this fact clearly.

Key Words : *Differential calculus of functions in several variables, Chain rule, Differentiable function, Partially differentiable function*